ECUACIONES FUNCIONALES II

David Ramos, Antonio Medinilla

11 de marzo de 2022

Problema 1. Hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que satisfacen $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ y para todo n se tiene

$$f(n+2) + \frac{1}{f(n)} = 2$$

Problema 2. Encontrar todas las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x+y)) = f(2x) + y$$

Problema 3. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$

Problema 4. Encuentra todas las funciones $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que verifican:

(i) $f(n) + f(n+1) = 2n + 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{63} (f(i)) = 2015$

Problema 5. Se consideran las funciones reales de variable real lineales, es decir, $f(x) = ax + b$, con a y b números reales. ¿Para qué valores de a y b se verifica que $f^{2000}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$?

Problema 6. Determinar todas las funciones estrictamente crecientes $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que verifican:

(i) $f(0) = 2$ (ii) $f(n) + f(f(n)) = 2n + 6, \forall n \in \mathbb{N}$

Problema 7. La función g se define sobre los enteros positivos y satisface las siguientes condiciones

(i) $g(2) = 1$ (ii) $g(2n) = g(n)$ (iii) $g(2n+1) = g(2n) + 1$

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \leq 2002$. Calcula el máximo valor $M = g(n)$. ¿Cuáles son los n que alcanzan este máximo?

Problema 8. Encontrar todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x+y)+xy=f(x)f(y) \text{ , para todo } x,y\in\mathbb{R}$$

Problema 9. Hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera x, y, u, y v reales, se cumple

$$(f(x)+f(y))(f(u)+f(v))=f(xu-yv)$$

Problema 10. Supongamos que una función $f\colon \mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ cumple

$$f(n+1)>f(f(n))$$

Pruebe que $f(n)=n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Problema 11. Denotamos $\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$ como el conjunto de los racionales no negativos. Encuentra todas las funciones $f\colon \mathbb{Q}^+\cup\{0\}\to\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$ que cumplen

(i) $f(x+1)=f(x)+1$, para todo $x\in\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$

(ii) $f(x^2)=f(x)^2$, para todo $x\in\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$